Descrição do Grupo dos Automorfismos do Disco Por Funções Lineares Fracionárias

Jonas R M Gomes

25 de abril de 2014

Seja $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ constantes uma função linear fracionária tal que, se $D = \{x \in \mathbb{C} \,\| x| < 1\}$ então $w_z(D) = D$. Observe que como w é contínua, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em D convergindo para ∂D então $\lim\limits_{n\to\infty} w(x_n) = w(x)$ e assim $w(x) \in \overline{D}$, se $w(x) \in int(D)$, repare que a inversa de w deve ter a mesma característica, de forma que $|w^{-1}(w(x))| < 1$ ou seja $|x| < 1$ absurdo. Assim $w(x) \in \partial D$

Suponha por absurdo que $d = 0$, então $\lim\limits_{z\to 0} w(z) = \infty \notin D$ e tal w não satisfaz nossa condição.

Assim, vamos trabalhar com as funções da forma $w(z) = \frac{az+b}{cz+1}$ sem perda de generalidade. Como $w(0) \in D$, logo $|w(0)| = |b| < 1$

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ e $z = e^{i\theta}$, então $|w(z)| = 1$, assim

$$|ae^{i\theta} + b| = |ce^{i\theta} + 1|$$

ou ainda:

$$(ae^{i\theta} + b)\overline{(ae^{i\theta} + b)} = (ce^{i\theta} + 1)\overline{(ce^{i\theta} + 1)}$$

$$|a|^2 + ae^{i\theta}\overline{b} + \overline{ae^{i\theta}}b + |b|^2 = |c|^2 + ce^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}} + 1$$

Para todo $\theta \in \mathbb{R}$

Em particular para $\theta = 0$

$$|a|^2 + a\overline{b} + \overline{a}b + |b|^2 = |c|^2 + c + \overline{c} + 1$$

Para $\theta = \pi$

$$|a|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b + |b|^2 = |c|^2 - c - \overline{c} + 1$$

Somando as duas equações e dividindo por 2:

$$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + 1$$

Tomando $\theta = \pi/2$

$$|a|^2 + ia\overline{b} - i\overline{a}b + |b|^2 = |c|^2 + ic - i\overline{c} + 1$$

Subtraindo a equação anterior e dividindo por i $a\overline{b} - \overline{a}b = c - \overline{c}$ De onde tiramos que $Im(a\overline{b}) = -Im(c)$

Ainda, tomando $\theta = \pi$ obtemos:

$$|a|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b + |b|^2 = |c|^2 - c - \overline{c} + 1$$

De forma que

$$-a\overline{b} + -\overline{a}b = -c - \overline{c}$$

E então

$$Re(a\overline{b}) = -Re(c)$$

Logo $a\overline{b} = -c$

Ainda $|a||b| = |c|$ e sabemos que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + 1$ Assim

$$|a|^2 + |b|^2 = |a|^2|b|^2 + 1 \Rightarrow |a|^2(1 - |b|^2) = 1 - |b|^2 \Rightarrow (|a|^2 - 1)(1 - |b|^2) = 0$$

E assim $|a| = 1$ ou $|b| = 1$. Mas já vimos que $|b| < 1$ e assim $|a| = 1$. Assim, diremos que $a = -e^{ik}$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Vamos escrever $b = -z_0 e^{ik}$, para algum z_0 tal que $|z_0| < 1$. Mas $a\overline{b} = -c$ Assim $a\overline{a}\overline{z_0} = \overline{z_0} = -c$. Dessa forma

$$w = -e^{ik} \frac{z + z_0}{-\overline{z_0} + 1}$$

$$w(z) = e^{ik} \frac{z + z_0}{\overline{z_0} - 1}$$