Introdução ao Trabalho Científico Acadêmico

Princípio do Máximo para Equações Diferenciais Parciais Elipticas

Jonas Gomes

IME-USP

Título: Princípio do Máximo para Equações Diferenciais Parciais Elipticas

Autor: Jonas Gomes
Orientador: Prof. Dr. Orlando Lopes

Sumário

Agradecimento

À Tamirys, pela paciência e suporte durante horas incontáveis de estudo;

À Cecília, sem a qual a realização desse trabalho e a minha conclusão de curso seriam impossíveis;

Introdução

O princípio do máximo é uma importante ferramenta para a obtenção de propriedades qualitativas de soluções de equações diferenciais e de desigualdades diferenciais sem o conhecimento explícito dessas soluções.

O princípio do máximo ocorre em muitos lugares e em formas tão diferentes que alguém que possua familiaridade com ele vai entender sua importância no estudo de aspectos clássicos de equações diferenciais.

Esse principio é uma generalização para situações mais complexas do seguinte fato bastante elementar: se a segunda derivada de uma função é positiva num intervalo, então o máximo e o mínimo dessa função são assumidos nos extremos do intervalo.

Esse tópico é uma excelente aplicação de conceitos vistos em disciplinas de cálculo e de análise, mesmo em nível de graduação.

No presente trabalho nos propomos a analisar o princípio do máximo para equações diferenciais parciais elípticas com condições de Dirichlet e para Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem. Nossas principais referências são [Protter and Weinberger(19 [Gilbarg and Trudinger(2001)] e [Renardy and Rogers(2004)]

Notação

1. $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano n-dimensional

2. $\Omega \subset R^n$ denotará um subconjunto próprio aberto. Diremos que Ω é um domínio se for conexo.

3. Se $S \subset R^n$, ∂S é a fronteira de S

4. Se $S‘ \subset\subset S$ se S' tem fecho compacto em S

5. ω_n é o volume da bola de raio 1 em $\mathbb{R}^n$, ou seja $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$

Derivadas Parciais

Não utilizaremos a notação de multi-índice nesse trabalho, pois as EDPs e EDOs trabalhadas serão principalmente de segunda ordem.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset R$. Dada $u : \Omega \to V$ de classe C^k, denotaremos por

1. $D_i u$ a derivada parcial de u em relação a x_i, o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, ou seja
$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

2. $D_{ij} u$ a derivada parcial de segunda ordem de u em relação aos vetores x_i e x_j da base canônica de $\mathbb{R}^n$:
$$D_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

3. $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ o gradiente de u.

4. $D^2 u = [D_{ij}]$ a matriz Hessiana de u

Teoremas e Fatos Utilizados

Teorema 0.1 (de Weierstrass) *Seja $f : K \to V \subset \mathbb{R}$ uma função contínua, com K um espaço topológico compacto. Então f possui um ponto de máximo e um ponto de mínimo.*

Proposição 0.2 *Seja $f : A \to R$ uma função contínua em $A \subset \mathbb{R}$ aberto. Se f atinge um máximo (local) em $m \in A$ e é derivável em m, então $f'(m) = 0$*

Proposição 0.3 (Teste da Segunda Derivada) *Seja $f : A \to R$ uma função contínua em $A \subset \mathbb{R}$ aberto. Se f atinge um máximo (local) em $m \in A$ e tem derivada segunda em m, então $f''(m) \leq 0$*

Teorema 0.4 (do Divergente) *Seja $w : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $w \in C^1(\overline{\Omega})$ e Ω é um domínio limitado com $\partial\omega$ de classe C^1. Se n denotar o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ (apontando para fora), então*
$$\int_\Omega divw dx = \int_{\partial\Omega} wnds$$

1 Princípio do máximo em uma dimensão

1.1 Um primeiro princípio do máximo

Tendo estabelecido os nossos fatos básicos sobre máximos e mínimos de funções de uma variável, procedemos para uma primeira demonstração do princípio do máximo. Para tanto, trabalharemos com um operador

$$L[u] = u'' + g(x)u'$$

Definição 1.1 Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então $L_g\colon C^2([a,b]) \to C([a,b])$ designará o operador

$$L_g[u](x) = u''(x) + g(x)u'(x)$$

Por abuso de notação denotaremos L_g frequentemente apenas por L

Observação 1.2 *Se para uma função $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $L[u] > 0$, é claro que u atinge seu máximo em um extremo, porque se $m \in (a,b)$ fosse ponto máximo teríamos $L[u](m) \leq 0$.*

Nosso primeiro objetivo será provar que, se $L[u] \geq 0$, então u atinge seu máximo e mínimo em seus extremos apenas, com exceção apenas no caso de u ser a função constante.

Proposição 1.3 *Seja $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $L[u] \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Se o ponto máximo é atingido em algum ponto interior, então u é constante.*

Demonstração: Seja u nas condições do enunciado e $c \in (a,b)$ o ponto de máximo de u, isto é, $u(c) = M$. Suponha, por absurdo, que existe $d \in (c,b)$ tal que $u(d) < M$ (se $d \in (a,c)$ será análogo). Nosso objetivo será construir uma função $w(x)$ que satisfaça $L[w] > 0$ tal que w tenha um ponto de máximo que é ponto interior, caindo em uma contradição graças a observação 1.2.

Para tanto, construiremos primeiro $z[x]$ que satisfaz: $z(x) < 0$ se $a < x < c$, $z(x) > 0$ se $c < x < b$ e $L[z] > 0$ em (a,d). Com tal função em mãos, definiremos

$$w(x) = u(x) + \epsilon z(x)$$

Onde

$$0 < \epsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}$$

Assim teremos $w(d) = u(d) + \epsilon z(d) < M$, enquanto $w(c) = M$ e $w(x) < u(x) < M$ se $a < x < c$. Assim, w quando restrita a $[a,d]$ atinge ponto de máximo em algum ponto interior. Mas note que

$$L[w] = L[u] + \epsilon L[z] > 0$$

Para todo $x \in (a,d)$, o que nos leva a uma contradição. Para completar a demonstração, precisamos exibir uma função z com as características mencionadas. Considere $z(x) = e^{\alpha(x-c)} - 1$. É imediato que $z(c) = 0$, $z(x) > 0$ se $x > c$ e $z(c) < 0$ se $x < c$. Quanto ao operador teremos:

$$L[z] = \alpha^2 e^{\alpha(x-c)} + g(x)\alpha e^{\alpha(x-c)} = \alpha e^{\alpha(x-c)}(\alpha + g(x))$$

De forma que basta tomarmos $\alpha > -g(x)$, para $x \in (a,c)$ (o que sempre é possível, já que g é limitada) e teremos

$$L[z] > 0$$

conforme desejado. $\square$

Poderíamos ter construído z de muitas outras formas. Por exemplo, a função $z(x) = (x-a)^\alpha - (c-a)^\alpha$ satisfaz nossa condição de sinal ao redor de c e além disso

$$L[z] = \alpha(x-\alpha)^{\alpha-2}(\alpha - 1 + g(x)(x-a))$$

De forma que basta tomarmos $\alpha \in \mathbb{N}$ par, tal que $\alpha > 1 - g(x)(x-a)$ e assim $L[z] > 0$.

Observação 1.4 *Em vários cenários provenientes da física matemática só podemos trabalhar com g limitada em todos os intervalos fechados contidos em (a,b) e não com g limitada em (a,b) conforme definição do operador L_g. Nesses casos, a conclusão da proposição 1.3 contínua válida. Para perceber isso, basta escolher um intervalo fechado contido em (a,b) que tenha c e d como pontos interiores.*

Com algumas modificações conseguiremos provar agora alguns fatos sobre as derivadas direcionais, caso existam, nos extremos: a condição de uma função possuir

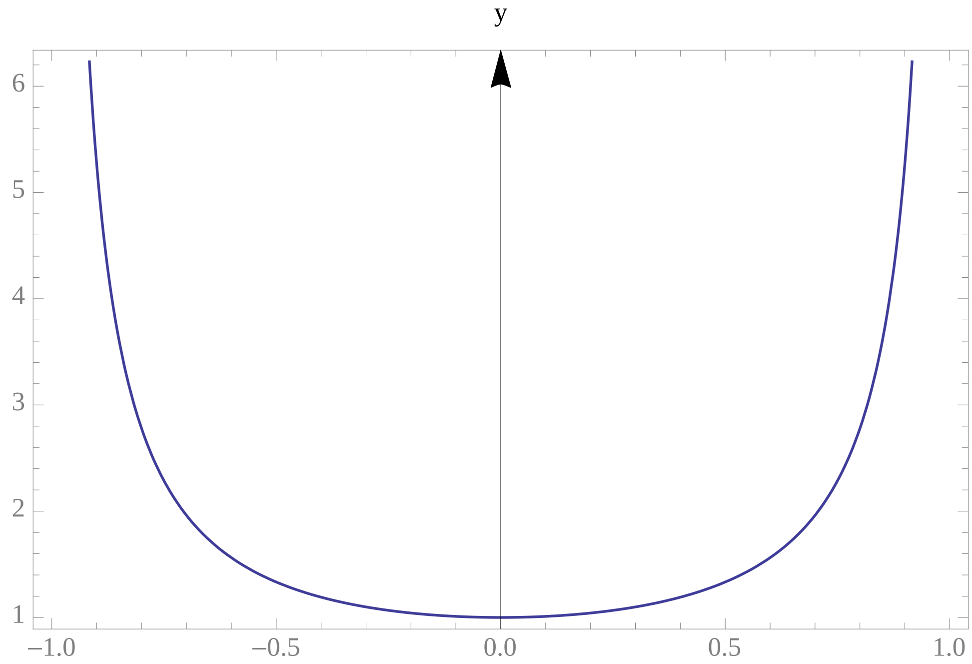

Figura 1.1: A função $\frac{1}{1-x^2}$ é limitada em todo intervalo fechado contido em $(-1,1)$, mas não é limitada em $(-1,1)$

o operador L não negativo em um intervalo aberto impede que os pontos das extremidade tenham derivada direcional igual a zero.

Proposição 1.5 *Seja u não constante tal que $L_g[u] \geq 0$ (g limitada em todos os intervalos fechados contidos em (a,b), conforme 1.4. Se g é limitada inferiormente em a, a é ponto de máximo de u e se u tem derivada direcional em a, então $u'(a) < 0$. Analogamente, se g é limitado superiormente em b, b é ponto de máximo de u e se u tem derivada direcional em b, então $u'(b) > 0$.*

Demonstração: Suponha que o máximo de u ocorre em a ($u(a) = M$) e que $u(d) < M$ para algum $d \in (a,b)$. Construímos z e w da mesma forma da demonstração da proposição 1.3. Como $L[w] > 0$ em $[a,d]$, o máximo de w deve ocorrer em a ou em d, mas $w(a) = M > w(d)$, de forma que a derivada direcional de w em a não pode ser positiva, ou seja, $w'(a) = u'(a) + \epsilon z'(a) \leq 0$. Mas $z'(a) = \alpha > 0$, devemos ter $u'(a) < 0$. A demonstração caso o máximo ocorra em b é análoga. □ Um exemplo de situação proibidas para funções nas condições da Proposição 1.5 é a seguinte:

Observação 1.6 *Sendo u uma função nas condições da proposição 1.5, então:*

1. *Se u tem um ponto interior c que é ponto de máximo local, restringindo o domínio de u para uma vizinhança de c de forma que c seja ponto de máximo global, pode-*

Figura 1.2: Na figura temos $u'(a) = 0$, logo $L_g[u] < 0$ para qualquer g nas condições da Def 1.1

mos aplicar a Proposição 1.3 e concluir que nesse intervalo aberto, u é constante. Aplicando a Proposição 1.5 a todos os intervalos abertos da forma (x, c) e (c, x), uma vez que $u'(c) = 0$ (de acordo com a Proposição 0.2), c não pode ser o ponto de máximo em nenhum desses intervalos, a não ser que u seja constante.

2. *Se u tem dois pontos de mínimo locais c_1 e c_2, deve ter um ponto de máximo local, de forma que concluímos a partir do último item que u é constante em (c_1, c_2).*

3. *u não tem nenhum ponto de inflexão horizontal. Suponha por absurdo que $c \in (a, b)$ seja tal que $u'(c) = 0$ mas c não é nem máximo nem mínimo local (isto é, u é estritamente crescente ou decrescente numa vizinhança de c). Caso u seja estritamente crescente em (x, c) para algum $x \in (a, c)$, aplicando a Proposição 1.5, temos uma contradição. (O caso de u ser estritamente decrescente é análogo).*

4. *Um resultado análogo ao da Proposição 1.5 se obtem para funções em que $L_g[u] \leq 0$. Basta aplicarmos a proposição a $(-u)$ e obteremos um princípio do mínimo.*

5. *A condição sobre a limitação de g é essencial. Para a conclusão das Proposições 1.3 e 1.5. A equação*

$$u'' + g(x)u' = 0$$

com

$$g(x) = \begin{cases} -3/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

tem a solução $u = 1 - x^4$

A Proposição 1.3 é claramente violada no intervalo $-1 \leq x \leq 1$, uma vez que u tem um máximo em $x = 0$. A proposição 1.5 é violada em $[0,1]$, uma vez que $u'(0) = 0$. As conclusões das proposições não se aplicam, uma vez que g não é limitada em $(0,1)$ (ver Fig 1.3)

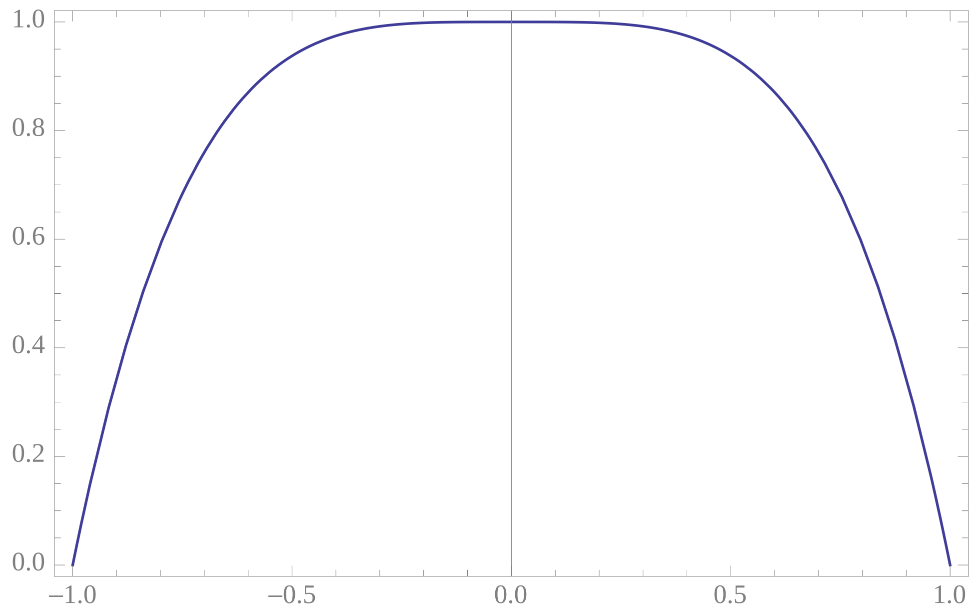

Figura 1.3: A função $u = 1 - x^4$ não obedece os resultados das Proposições 1.3 e 1.5

Vamos trabalhar agora com extensão da desigualdade diferencial das proposições anteriores

$$(L+h)[u] = u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0 \tag{1.1}$$

Não podemos esperar resultados similares aos das proposições anteriores, uma vez que exemplos triviais como $u'' + u = 0$ tem soluções com pontos de máximo no seu interior. Mesmo com $h(x) \leq 0$, não obtemos máximos apenas nos extremos. Por exemplo, a equação $u'' - u = 0$ tem $u(x) = -e^{-x} - e^{x}$, que obtém seu valor máximo (-2) em $x = 0$.

Apesar de não conseguirmos demonstrar um princípio do máximo irrestrito, conseguimos mostrar que uma função não constante que satisfaz a Desigualdade 1.1 com $h(x) \leq 0$ não pode obter um máximo não negativo em seu interior. Começaremos com uma observações simples para a extensão dos resultados anteriores.

Observação 1.7 *Se u satisfaz*

$$(L+h)[u] > 0 \text{ com } h \leq 0$$

então u não pode obter máximo não negativo em seu interior. Suponha que $c \in (a,b)$ seja ponto de máximo de u. Então $u'(c) = 0$, $u''(c) < 0$. Então $h(c)u(c) \geq 0$ pela definição de $(L+h)[u]$, de forma que $u(c) \leq 0$

Para passarmos da desigualdade estrita $(L+h)[u] > 0$ para $(L+h)[u] \geq 0$ precisamos fazer a mesma construção da demonstração da Proposição 1.3, bastando construir z de forma que $(L+h)[z] > 0$.

Proposição 1.8 *Se $u(x)$ satisfaz a desigualdade diferencial*

$$(L+h)[u] = u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0 \tag{1.2}$$

em um intervalo (a,b) com $h(x) \leq 0$ e g e h são limitadas em todos os subintervalos fechados de (a,b) e se u assume um máximo não negativo M em um ponto interior c, então $u(x) = c$.

Demonstração: Seja u nas condições do enunciado. Suponha, por absurdo, que existe $d \in (c,b)$ tal que $u(d) < M$. Nosso objetivo será construir uma função $w(x)$ que satisfaça $(L+h)[w] > 0$ tal que w tenha um ponto de máximo não negativo em seu interior, caindo em uma contradição graças a observação 1.7.

Para tanto, construiremos primeiro $z[x]$ que satisfaz: $z(x) < 0$ se $a < x < c$, $z(x) > 0$ se $c < x < b$ e $(L+h)[z] > 0$ em (a,d). Com tal função em mãos, definiremos

$$w(x) = u(x) + \epsilon z(x)$$

Onde

$$0 < \epsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}$$

Assim teremos $w(d) = u(d) + \epsilon z(d) < M$, enquanto $w(c) = M$ e $w(x) < u(x) < M$ se $a < x < c$. Assim, w quando restrita a $[a,d]$ atinge ponto de máximo não negativo em algum ponto interior. Mas note que

$$(L+h)[w] = (L+h)[u] + \epsilon(L+h)[z] > 0$$

Para todo $x \in (a,d)$, o que nos leva a uma contradição.

Para completar a demonstração, precisamos exibir uma função z com as características mencionadas. Considere $z(x) = e^{\alpha(x-c)} - 1$. É imediato que $z(c) = 0$, $z(x) > 0$ se $x > c$ e $z(c) < 0$ se $x < c$. Quanto ao operador teremos:

$$(L+h)[z] = e^{\alpha(x-c)}(\alpha^2 + g(x)\alpha + h(x)(1 - e^{-\alpha(x-c)}))$$

Como $e^{\alpha(x-c)} > 0$, basta encontrar α que satisfaça $\alpha^2 + g(x)\alpha + h(x)(1 - e^{-\alpha(x-c)}) > 0$. Porém

$$\alpha^2 - \alpha|g(x)| + h(x) \leq \alpha^2 + \alpha g(x) + (1 - e^{-\alpha(x-c)})h(x)$$

Logo $\alpha > \frac{1}{2}\left(-|g(x)| + \sqrt{g^2(x) - 4h(x)}\right)$ é suficiente para garantir que $(L+h)[z] > 0$ (o que é sempre possível pois g e h são limitadas e a raiz sempre existe uma vez que $h(x) \leq 0$) $\square$

A proposição 1.8 é uma clara generalização da proposição 1.3. Vamos ver que uma função obedecendo a desigualdade diferencial da proposição 1.8 também tem um comportamento diferenciado em relação a derivadas direcionais nos extremos, estendendo o resultado da 1.5:

Proposição 1.9 *Se $u(x)$ não constante satisfaz a desigualdade diferencial da proposição 1.8 e se u assume um máximo não negativo em a e se a função $g(x)+(x-a)h(x)$ é limitada inferiormente em $x = a$ então $u'(a) < 0$. Se u tem um máximo não negativo em b e se $g(x)-(b-x)h(x)$ é limitada superiormente em $x = b$ então $u'(b) > 0$.*

Demonstração: Suponha que o máximo de u ocorre em a ($u(a) = M$) e que $u(d) < M$ para algum $d \in (a,b)$. Construímos z e w da mesma forma da demonstração da proposição 1.5. Como $L[w] > 0$ em (a,d), o máximo de w deve ocorrer em a ou em d, mas $w(a) = M > w(d)$, de forma que a derivada direcional de w em a não pode ser positiva. Assim $w'(a) = u'(a) + \epsilon z'(a) \leq 0$. Mas $z'(x) = \alpha e^{\alpha(x-a)}$ e assim $z'(a) = \alpha > 0$ de onde segue que $u'(a) < 0$. Falta mostrar que para essa z modificada vale que $(L+h)(z) > 0$, mas basta escolher α como fizemos na demonstração da proposição 1.8. $\square$

Corolário 1.10 *Se $u(x)$ não constante satisfaz a desigualdade diferencial $(L+h)[u] \geq 0$ em (a,b) e é contínua em $[a,b]$ e se $u(a) \leq 0$ e $u(b) \leq 0$ então $u(x) < 0$ em (a,b).*

1.2 Princípio do Máximo Generalizado

Continuamos explorando o problema de $(L+h)[u] \geq 0$, mas vamos remover a hipótese de h ser não positiva. Para isso considere w de classe C^2 em $[a,b]$ e que satisfaz $w > 0$ e $(L+h)[w] \leq 0$ em (a,b). Se $u = wv$ então

$$(L+h)[u] = (L+h)[wv] = (wv)'' + (wv)'g + (wv)h = (w'v + v'w)'$$

$$= w''v + 2w'v' + v''w + w'vg + wv'g + wvh$$

$$= v(w'' + w'g + wh) + 2w'v' + v''w + wv'g$$

$$= w(v'' + v'(g + 2w'/w) + v/w(L + h)[w]) \geq 0$$

Como $w > 0$

$$v'' + v'(g + 2w'/w) + v/w(L + h)[w] \geq 0$$

Se escolhermos $g_2(x) = g(x) + 2w'(x)/w(x)$ e $h_2(x) = (L + h)[w]/w$ então

$$v'' + v'g_2 + vh_2 \geq 0$$

Ou seja

$$(L_{g_2} + h_2)[u/w] \geq 0$$

E podemos aplicar as Proposições 1.8 e 1.9 para a função $v = u/w$. Isso porque $h_2(x) \leq 0$ e h e g são limitadas em todos os intervalos fechados contidos em (a, b), pois w foi suposta de classe C^2.

Nosso problema agora vai ser encontrar uma função w que satisfaça as propriedades exigidas. Para isso, suponha que

$$w = 1 - \beta(x - a)^2$$

Então $w'(x) = -2\beta(x - a)$ e $w''(x) = -2\beta$

$$(L{+}h)[w](x) = -2\beta{-}2\beta(x{-}a)g(x){+}(1{-}\beta(x{-}a)^2)h(x) = -2\beta(1{+}(x{-}a)g(x){+}\frac{1}{2}(x{-}a)^2h(x)){+}h(x)$$

Se supusermos g e h limitadas inferiormente, digamos por $g \geq G$ e $h \geq H$, basta que $1 + (x - a)G + \frac{1}{2}(x - a)^2H > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se considerarmos que h também é limitado superiormente, podemos escolher β de forma que

$$\beta \geq \frac{1}{2}\left(\frac{h(x)}{1 + (x - a)G + \frac{1}{2}(x - a)^2H}\right)$$

Dessa forma teremos

$$(L + h)[w] \leq 0$$

E, se $b - a$ é pequeno o suficiente, teremos $w > 0$ em $[a, b]$. Tendo construído w dessa forma, podemos provar nosso princípio generalizado do máximo:

Teorema 1.11 (Principio do Máximo Generalizado) *Se u satisfaz $(L+h)[u] \geq 0$, com h limitada e g limitada inferiormente, para qualquer intervalo fechado $[a, b]$ contido no* *domínio de g existe uma função w com $w > 0$ e $(L+h)[w] \leq 0$ tal que a função u/w satisfaz os princípios do máximo das proposições 1.8 e 1.9, ou seja: Se u/w assume um máximo não negativo M em um ponto interior c, então u/w é constante.*

Além disso, u/w é não constante e assume um máximo não negativo em a então $(u/w)'(a) < 0$. Se u/w tem um máximo não negativo em b então $(u/w)'(b) > 0$.

Observação 1.12 *Notamos que o Teorema 1.11 nos garante que uma função u nas condições de seu enunciado não pode oscilar muito rapidamente. Isso porque, se $u > 0$ e se anula em a e em b então u/w tem um máximo não negativo entre a e b e portanto o Teorema seria falso a menos que a distância entre a e b seja maior que um certo número $\epsilon > 0$ que depende de g e de h. Portanto, em todo intervalo de comprimento menor ou igual a ϵ, u tem no máximo dois zeros, entre os quais é negativa.*

Da mesma forma, se u/w viesse um mínimo relativo, chegaríamos a um absurdo substituindo u por $-u$ e concluímos que os zeros de u estão suficientemente espaçados.

Se u não constante satisfaz $(L+h)[u] = 0$ então o raciocínio anterior se aplica também a $-u$ e portanto em todo intervalo de comprimento menor ou igual a ϵ tal u pode ter somente um zero.

Corolário 1.13 *Se u satisfaz $(L+h)[u] = 0$ e além disso $u(a) = 0$, então se a^* for o primeiro zero de u depois de a, então existe w nas condições do 1.11 válida para todo intervalo $[a,b]$ com $b < a^*$*

Demonstração: Considere $z(x) = 2 - e^{\lambda(x-a)}$, em que λ será determinada. Seja $w(x) = u(x) + \epsilon z(x)$. Vamos escolher ϵ suficientemente pequeno de forma que $w > 0$ em $[a,b]$. Então

$$(L+h)[w] = (L+h)[u] + \epsilon(L+h)[z] = -\epsilon e^{\lambda(x-a)}(\lambda^2 + \lambda g(x) + h(x)(1 - 2e^{-\lambda(x-a)})))$$

Só devemos tomar $\lambda > \frac{Log2}{x-a}$. Uma vez que h é limitada, podemos escolher λ grande o suficiente de forma que $\lambda^2 + \lambda g(x) + h(x)(1 - 2e^{-\lambda(x-a)})) > 0$, de forma que teremos $(L+h)[w] \leq 0$ e w está nas condições do Teorema 1.11. □

De agora em diante, dado $a \in \mathbb{R}$, chamaremos de conjugado de a, denotado a^* em relação a equação $(L+h)[u] = f(x)$ como o primeiro zero maior que a da função u que satisfaz $(L+h)[u] = 0$ e $u(a) = 0$

1.3 Unicidade do Problemas do Valor Inicial

O problema de valor inicial (PVI):

$$u''(x) + g(x)u'(x) + h(x) = f(x)$$

$$u(a) = \gamma_1, u'(a) = \gamma_2$$

Tem solução e unicidade garantidos pela teoria geral de EDO. Vamos mostrar que o princípio do máximo nos dá uma garantia da unicidade da solução. Sejam u_1 e u_2 duas soluções para o PVI. Então $v = u_1 - u_2$ é tal que:

$$v''(x) + g(x)v'(x) + h(x)v = 0$$

$$v(a) = v'(a) = 0$$

Ou ainda

$$(L + h)[v] = 0$$

De forma que o teorema 1.11 se aplica tanto a $-v$ quanto a v.

Logo existe $\epsilon > 0$ (que depende apenas de g e de h) e uma determinada função $w_1 > 0$ tal que se v/w_1 atinge máximo (positivo pois $(v/w)(a) = 0$) em seu interior, então é constante em $[a, a+\epsilon]$. Logo o máximo de (v/w) acontece em a ou em $a+\epsilon$. O mesmo vale para $(-v)/w_1$, que em a, v/w atinge máximo ou mínimo. Porém

$$(v/w)' = (v'w - vw')/w^2$$

E, portanto, em a temos $(v/w)'(a) = 0$, e assim v é identicamente nula em $[a, a+\epsilon]$ e portanto $(v/w)'(a+\epsilon) = 0$ e podemos aplicar o mesmo raciocínio para $[a+\epsilon, a+2\epsilon]$. Como $\epsilon > 0$ não depende de a ou de b, vemos que todo intervalo pode ser coberto dessa forma de onde v é constante e igual a zero.

1.4 Unicidade do Problema do Valor de Fronteira com Condição de Dirichlet

O problema de valor de fronteira com condição de Dirichlet (**PVFD**):

$$u''(x) + g(x)u'(x) + h(x) = f(x) \tag{1.3}$$

$$u(a) = \gamma_1, u(b) = \gamma_2 \tag{1.4}$$

Não podemos ter esperança de achar uma unicidade irrestrita de soluções, mesmo com g e h limitadas. Por exemplo, a equação

$$u'' + u = 0$$

Tem duas soluções distintas $u_1(x) = sen(x)$ e $u_2(x) = 0$ que satisfazem $u(0) = u(\pi) = 0$. Vamos tratar, entretanto, de alguns casos mais restritos:

1.4.1 h não positiva

Se $h \leq 0$, sejam u_1 e u_2 duas soluções do PVF com as mesmas condições de fronteira e seja $v = u_1 - u_2$. Então v satisfaz

$$v''(x) + g(x)v'(x) + h(x) = 0$$

$$v(a) = v(b) = 0$$

Da proposição 1.8 sabemos que se v não for identicamente nula, então $v < 0$ em (a, b). Por outro lado, $(-v)$ satisfaz a mesma condição e portanto se v não fosse identicamente nula $v > 0$ em (a, b), de onde segue que $v = 0$ e portanto $u_1 = u_2$ e o problema a solução é única.

1.4.2 Intervalos suficientemente pequenos

Se o intervalo for menor do que a distância entre a e seu conjugado (isso é, se $b < a^*$ Cf. Corolário 1.13) e u_1 e u_2 são soluções do mesmo PVFD, tome $v = u_1 - u_2$. Pelo corolário supracitado, existe $w > 0$ tal que v/w satisfaz o teorema 1.11 em $[a, b]$, de forma que, como $v/w(a) = v/w(b) = 0$ então $(v/w)(x) \leq 0$. De forma similar, aplicando o mesmo argumento para $-v$, concluímos que v é identicamente nula.

1.5 Aproximação no PVFD

Frequentemente é impossível encontrar uma solução explícita para o PVFD (1.3), porém existem alguns métodos para estimar o valor de uma função u que o satisfaz de forma é conhecido um majorante para o erro. Tal aproximação equivale a determinar limites superiores e inferiores para os valores da solução.

Seja u uma solução do PVFD. Assumindo que as funções f, g e h são limitadas e $h \leq 0$ em (a,b). Nessas circunstâncias podemos usar a Proposição 1.8 de forma a obter limites para o valor de u. Suponha que seja possível encontrar duas funções $z_1(x)$ e $z_2(x)$ que satisfazem:

$$\forall x \in (a,b)\ (L+h)[z_1] \leq f(x) \tag{1.5}$$

$$(L+h)[z_2] \geq f(x) \tag{1.6}$$

$$z_1(a) \geq \gamma_1, z_1(b) \geq \gamma_2 \tag{1.7}$$

$$z_2(a) \leq \gamma_1, z_2(b) \leq \gamma_2 \tag{1.8}$$

Então a função $v_1(x) = u(x) - z_1(x)$ é tal que

$$(L+h)[u] \leq 0 \tag{1.9}$$

$$v_1(a) \leq 0 \text{ e } v_2(b) \leq 0 \tag{1.10}$$

Aplicando a proposição 1.8, $v_1(x) \leq 0$ em $[a,b]$ e assim $u(x) \leq z_1(x)$ em $[a,b]$. Da mesma forma, se $v_2(x) = z_2(x) - u(x)$ teremos $v_2(x) \leq 0$. Assim

$$z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x)$$

Nosso problema agora se reduz a encontrar funções z_1 e z_2 que satisfaçam as propriedades esperadas. Isso é facilmente feito, basta que procuremos soluções racionais, polinomiais ou mesmo exponenciais. Isso é sempre possível.

Suponha, por exemplo, que $z_1(x) = A(2 - e^{-\alpha(x-a)})$, fixe α de forma que $(L+h)[e^{-\alpha(x-a)}] = (\alpha^2 - \alpha g + h)e^{-\alpha(x-a)} > 0$ em (a,b). Definindo

$$k = min_{a \leq x \leq b}[(\alpha^2 - \alpha g + h)e^{-\alpha(x-a)}]$$

E escolha A de forma que

$$A = max\left[\gamma_1, \gamma_2, \frac{1}{k} max_{a \leq x \leq b} - f(x), 0\right]$$

Dessa forma $z_1(x)$ satisfaz as propriedades desejadas. Da mesma forma podemos construir $z_2(x)$, e com esse exemplo conseguimos

$$|u(x)| \leq 2max\left[|\gamma_1|, |\gamma_2|, \frac{1}{k} max_{a \leq x \leq b} |f(x)|\right]$$

Esse simples exemplo tem uma consequência importante na dependência das soluções de u em relação as condições de fronteira e de $f(x)$. Suponha que u seja solução do PVFD para $f(x), \gamma_1$ e γ_2 e que v seja solução do PVFD para $f_v(x), \gamma_{1v}$ e γ_{2v}. Então $w = u - v$ é solução de

$$w''(x) + gw'(x) + hw = f - f_v \tag{1.11}$$

$$w(a) = \gamma_1 - \gamma_{1v} \text{ e } w(b) = \gamma_2 - \gamma_{2v} \tag{1.12}$$

E pelo nosso exemplo

$$|w(x)| = |u(x) - v(x)| \leq 2max\left[|\gamma_1 - \gamma_{1v}|, |\gamma_2 - \gamma_{2v}|, \frac{1}{k} max_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_v(x)|\right]$$

Assim, desde que $\gamma_1 - \gamma_{1v}$, $\gamma_2 - \gamma_{2v}$ e $max_{a \leq x \leq b}|f(x) - f_v(x)|$ sejam pequenos, então $|u(x) - v(x)|$ também será. Ou seja, as soluções do PVFD depende continuamente de $f(x)$ e das condições de fronteira

Como exemplo do que foi desenvolvido até aqui vamos estimar o valor da solução de

$$u'' - xu = 0 \text{ para } 0 < x < 1$$
$$u(0) = 0, u(1) = 1$$

Para $x = 1/2$.

Vamos encontrar $z_1(x)$ e $z_2(x)$ de forma que $(L+h)[z_1] < 0$ e $z_1(0) \geq 0$ e $z_2(1) \leq 1$. Se procurarmos uma função simples do tipo $z_1(x) = Ax^2 + Bx + c$, então $z_1(x) = (-3/4)x^2 + 7/4x$ é tal que $z_1(0) = 0$, $z_1(1) = 1$ e $(L+h)[z_1] = -3/2 + x(7x/4 - 3x^2/4) < 0$ para $0 < x < 1$ Da mesma forma, $z_2(x) = 1/10x^2 + 9/10x$ é tal que $z_2(0) = 0$, $z_2(1) = 1$ e $(L+h)[z_2] = 1/5 + x(9x/10 + x^2/10) > 0$ para $0 < x < 1$.

Dessa forma $0.475 = z_2(1/2) \leq u(1/2) \leq z_2(1/2) = 0.6875$ ou $u(x) \approx 0.57125$, que está suficientemente próximo da solução verdadeira: 0.4726

1.6 Oscilação e Teoremas de Comparação

Vamos usar agora o princípio do máximo para encontrar uma relação entre diferentes soluções do problema

$$(L+h)[f]=0 \tag{1.13}$$

Teorema 1.14 *Sejam u e w duas soluções de 1.13, então dois zeros d w deve haver no máximo um zero de u*

Demonstração: Sejam a e b dois zeros consecutivos de w, de forma que w tem um sinal único em (a,b). Sem perda de generalidade, suponha que $w(x)>0$ em (a,b), então

$$v(x)=\frac{u(x)}{w(x)}$$

De onde

$$v'=\frac{u'w-uw'}{w^2}$$

e

$$v''=\frac{(u''w-uw'')w-2w'(u'w-uw')}{w^3}$$

Assim

$$\left(2\frac{w'}{w}+g\right)v'=\frac{2w'(u'w-uw')+w(gu'w-gu'w)}{w^3}$$

Mas

$$gu'w=-u''w-huw \text{ e } gw'u=-w''u-hwu$$

Logo

$$\left(2\frac{w'}{w}+g\right)v'=\frac{2w'(u'w-uw')+w(-u''w+w''u)}{w^3}$$

E assim v satisfaz a equação diferencial

$$v''+\left(2\frac{w'}{w}+g\right)v'=0$$

Pelo primeiro princípio do máximo (Cf. Prop 1.3), v não obtem nem máximo nem mínimo em (a,b), de onde temos duas opções:

1. v é constante e então $u(x)=kw(x)$ e u não tem nenhum zero em (a,b)

2. v não possui máximo nem mínimo, logo possui no máximo um zero em (a,b)

Com isso nosso resultado está estabelecido. $\square$

Vamos estudar agora como uma mudança em h afeta a distância entre os zeros da solução. Para isso, sejam u e w soluções (respectivamente) das equações

$$(L+h_1)[f]=0$$
$$(L+h_2)[f]=0$$

Com $h_1(x)\leq h_2(x)$ em $[a,b]$. Como na demonstração do Teorema 1.14, vamos supor que $w>0$ em $[a,b]$ e definir $v=\frac{u}{w}$, chegando na seguinte equação diferencial para v:

$$v''+\left(2\frac{w'}{w}+g\right)v'+(h_1-h_2)v=0 \tag{1.14}$$

Como todo zero de u também é zero de v, caso u tenha dois zeros, v também terá. Porém, a função nula também satisfaz a equação 1.14 e pelo nosso resultado referente ao PVFD, $v=0$ de onde $u=0$. Dessa forma, se u é não trivial, pode ter somente um zero em (a,b)

Supondo agora que $w(a)=u(a)=0$, então, pela unicidade do problema de valor inicial (PVI), devemos ter $w'(a)\neq 0$ e $u'(a)\neq 0$ (pois a função nula também satisfaz essas duas propriedades). Ainda

$$u''(a)+g(a)u'(a)=w''(a)+g(a)w'(a)=0$$

Portanto

$$\frac{u''(a)}{u'(a)}=\frac{w''(a)}{w'(a)}=-g(a) \tag{1.15}$$

Vamos calcular $v(a)=\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{w(x)}=\frac{u'(a)}{w'(a)}$ (pela regra de L'Hôpital). Sem perda de generalidade, supomos $v(a)>0$, calculando $v'(x)=\lim_{x\to a}\frac{w(x)u'(x)-u(x)w'(x)}{w^2(x)}$. Usando duas vezes a regra de L'Hôpital e a relação 1.15 obtemos $v'(a)=0$.

Se houvesse $x_0\in(a,b)$ com $v(x_0)<v(a)$ teríamos, pela proposição 1.9 que $v'(a)<0$, uma contradição. Portanto em $[a,b]$ vale

$$0<v(a)\leq v(x)$$

Dessa forma $u(x) \neq 0$ em (a,b). Se $u(b) = w(b) = 0$ chegariamos da mesma forma que $u(x) \neq 0$ em (a,b). Se temos $w(a) = w(b) = u(a) = u(b) = 0$ pelo raciocínio anterior chegamos que v deve ser constante e portanto $h_1 \equiv h_2$

Com isso chegamos no

Teorema 1.15 *Se u e w forem soluções das equações*

$$(L+h_1)[u] = 0(L+h_2)[w] = 0$$

Com $h_2 \geq h_1$, então, se $w(x) \neq 0$ em (a,b), então u pode ter somente um zero no intervalo fechado $[a,b]$, a menos que $w(a) = w(b) = 0$, $h_1 \equiv h_2$ e $u(x) = kw(x)$.

Nosso teorema pode ser expandido com algumas restrições auxiliares. Primeiro, suponha que u é solução de $(L_1 + h_1)[u] = 0$ sendo $L_1[u] = u'' + g_1 u$. Suponha que g_1 seja de classe C^1 e seja g_2 outra função de classe C^1. Considere a função

$$v(x) = u(x)e^{\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(y)-g_2(y)]dy}$$

Repare que

$$v'(x) = u'(x)e^{\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(y)-g_2(y)]dy} + \frac{1}{2}u(x)(g_1(x)-g_2(x))e^{\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(y)-g_2(y)]dy}$$

e

$$v''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(y)-g_2(y)]dy}(g_1(x)-g_2(x))^2 u[x] + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(y)-g_2(y)]dy}u(x)(g_1'(x)-g_2'(x)) +$$

$$e^{\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(y)-g_2(y)]dy}(g_1(x)-g_2(x))u'(x) + e^{\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(y)-g_2(y)]dy}u''(x)$$

Se $H(x) = \frac{1}{2}[g_2'(x) - g_1'(x)] + \frac{1}{4}[g_2(x)^2 - g_1(x)^2] + h_1[x]$, então

$$v''(x) + g_2(x)v'(x) + H(x)v(x) = 0$$

Como u e v possuem os mesmos zeros, se w for uma função satisfazendo:

$$(L_2 + h_2)[w] = 0$$

Com $L_2[w] = w'' + g_2 w$ então, se $h_2(x) \geq H(x)$ o teorema 1.14 se aplica para v e para w e portanto é possível comparar os zeros de w e de u:

Teorema 1.16 *Se $u(x)$ e $w(x)$ forem soluções de*

$$u''(x) + g_1(x)u'(x) + h_1(x)u(x) = 0$$

e

$$w''(x) + g_2(x)w'(x) + h(x)w(x) = 0$$

e ainda

$$h_2(x) - \frac{1}{2}g_2'(x) - \frac{1}{4}[g_2(x))]^2 \geq h_1(x) - \frac{1}{2}g_1'(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2$$

Então, se $w(x) \neq 0$ para todo x em (a,b), $u(x)$ tem no máximo um zero em $[a,b]$, a menos que $w(a) = w(b) = 0$, $h_2(x) - \frac{1}{2}g_2'(x) - \frac{1}{4}[g_2(x))]^2 = h_1(x) - \frac{1}{2}g_1'(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2$ e $u(x) = kw(x)e^{\frac{1}{2}\int_a^x [g_1(y)-g_2(y)]dy}$

Temos o seguinte corolário interessante do Teorema 1.16:

Corolário 1.17 *Se u é uma solucão de*

$$(L+h)[u] = 0$$

com

$$h(x) - \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{4}[g(x)]^2 \leq M$$

Para alguma constante M, então a distância entre os zeros de $u(X)$ é pelo menos $\pi/\sqrt{M}$. Se

$$h(x) - \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{4}g(x)^2 \geq M' > 0$$

Então a distância entre zeros consecutivos de $u(x)$ é no máximo $\pi/\sqrt{M'}$

Demonstração: Seja $w = Sen[\sqrt{M}(x-a)]$. Então w satisfaz a equação

$$w'' + Mw = 0$$

Ou seja, é solução do operador

$$(L_2 + g_2)[w] = 0$$

Com $L_2[w] = w''$ e $g_2(x) \equiv M$

Se $h(x) - \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{4}[g(x)]^2 \leq M$ então o Teorema 1.16 se aplica. Se tomarmos a com $u(a) = 0$ então o próximo zero de u está depois de $a + \pi/\sqrt{M}$ $\square$

1.6.1 Exemplos de Aplicações a Operadores Lineares

1. Todas as soluções de $u''(x) + (1 + e^{-x})u(x) = 0$ (para $x > 0$) tem infinitos zeros

   Nesse caso $h(x) = (1 + e^{-x}), g(x) \equiv 0$. Temos $h(x) \geq 1$ de forma que $h(x)$ tem pelo menos uma raiz em cada intervalo de comprimento maior que π

2 Princípio do Máximo para EDPs Elípticas

2.1 Laplaciano

O operador de Laplace (ou Laplaciano) é definido por

Definição 2.1 [Laplaciano]

$$\Delta\colon C^k(\Omega) \to C^{k-2}(\Omega) \tag{2.1}$$

$$\Delta u = \sum_i^n D_{ii} u = divDu \tag{2.2}$$

Definição 2.2 [Função Harmônica, Sub-harmônica e Super-harmônica] Dizemos que $u \in C^2(\Omega)$ é Harmônica (Sub-harmônica , Super-harmônica) se

$$\Delta u = 0(\Delta u \geq 0, \Delta u \leq 0)$$

Usando o Teorema do Divergente (Cf. Teo 0.4) provamos os nossos primeiros fatos sobre o operador Laplaciano

Proposição 2.3 *Seja Ω e n nas condições do Teorema 0.4. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ então*

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} Du \cdot nds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

A demonstração segue diretamente do fato que $Df \cdot n = \frac{\partial f}{\partial n}$

Teorema 2.4 (Desigualdades do Valor Médio) *Se $u \in C^2(\Omega)$ (Ω domínio) satisfaz*

$\Delta u = 0$ ($\Delta u \geq 0, \Delta u \leq 0$) em Ω, então para qualquer bola $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ temos

$$u(y) = (\geq, \leq)\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u ds \tag{2.3}$$

$$u(y) = (\geq, \leq)\frac{1}{\omega_n R^n} \int_B u dx \tag{2.4}$$

$$\tag{2.5}$$

Demonstração: Seja $y \in \Omega$ e $R \in \mathbb{R}$ tal que $B_R(y) \subset\subset \Omega$. Para $\rho \in (0, R)$. Vamos aplicar a proposição 2.3 para obtermos

$$\int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{B_\rho(y)} \Delta u = (\geq, \leq) 0$$

Fazendo uma mudança de coordenadas para $r = |x-y|$ e $\omega = \frac{x-y}{r}$, com $u(x) = u(y+r\omega)$ temos

$$\int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial r}(y + \rho\omega) ds =$$

Mas $ds = r^{n-1} d\omega$ e e em $B_\rho(y)$, $r^{n-1} = \rho^{n-1}$ assim

$$\int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial r}(y + \rho\omega) ds = \rho^{n-1} \int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y + \rho\omega) d\omega$$

$$= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|\omega|=1} u(y + \rho\omega) d\omega) = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u ds]$$

$$= (\geq, \leq) 0$$

Portanto, como a última expressão é independente de ρ, para $0 < \rho < R$

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u ds = R^{n-1} \int_{\partial B_R(y)} u ds$$

Ainda

$$\min_{x \in B\rho y} \{u(x)\} n\rho^{n-1} \omega_n \leq \int_{\partial B_\rho(y)} u ds \leq \max_{x \in B\rho y} \{u(x)\} n\rho^{n-1} \omega_n$$

De forma que

$$\lim_{\rho \to 0^+} \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho(y)} u ds = n\omega_n u(y)$$

De onde temos

$$n\omega_n u(y) = (\geq, \leq)\frac{1}{R^{n-1}}\int_{\partial B_R(y)} u ds$$

De onde segue a nossa primeira relação.

Para a segunda relação, veja que, para todo $\rho \leq R$

$$\rho^{n-1} n\omega_n u(y) = (\geq, \leq)\int_{\partial B_\rho(y)} u ds$$

Integrando em relação ρ de 0 a R:

$$\omega_n R^n u(y) = (\geq, \leq)\int_0^R \int_{\partial B_\rho(y)} u ds d\rho = \int_B u dx$$

□

Da nossa desigualdade do Valor Médio, vamos derivar o princípio do máximo (e do mínimo) para funções sub-harmônicas (super-harmônicas):

Teorema 2.5 (Princípio do Máximo para Funções Sub-Harmônicas) *Suponha $u \in C^2(\Omega)$, $u \in C(\overline{\Omega})$, Ω domínio limitado, satisfaça $\Delta u \geq 0$ em Ω. Então, se ponto de máximo de u em $\overline{\Omega}$ é atingido em Ω, u é constante.*

Demonstração: Suponha que $\Delta u \geq 0$ e seja M o máximo de u em $\overline{\Omega}$. Seja $\Omega_M = u^{-1}[M] \cap \Omega$. Como u é contínua, Ω_M é fechado em relação a Ω. Seja z em Ω_M, aplicando a desigualdade do valor médio (Cf. Teo 2.4) para a função $u - M$ (que é sub-harmônica) em uma bola $B \subset\subset \Omega$ de raio R centrada em z temos:

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n}\int_B (u - M) dx \leq 0$$

E dai segue que $u = M$ em B. Assim Ω_M é um conjunto aberto em Ω e portanto, como Ω é conexo:$\Omega_M = \Omega$ □

Corolário 2.6 (Princípio do Mínimo para Funções Super-Harmônicas) *Suponha $u \in C^2(\Omega)$, $u \in C(\overline{\Omega})$, Ω domínio limitado, satisfaça $\Delta u \leq 0$ em Ω. Então, se o ponto de mínimo de u em $\overline{\Omega}$ é atingido em Ω, u é constante.*

Corolário 2.7 (Princípio do Máximo para Funções Harmônicas) *Suponha $u \in C^2(\Omega)$, $u \in C(\overline{\Omega})$, Ω domínio limitado, satisfaça $\Delta u = 0$ em Ω. Então, se u atinge ponto de mínimo ou de máximo em Ω, u é constante.*

Corolário 2.8 *Suponha $u \in C^2(\Omega)$, $u \in C(\overline{\Omega})$, Ω domínio, satisfaça $\Delta u = 0$ então*

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u, \ x \in \Omega$$

2.1.1 Unicidade para Equação de Laplace e Poisson com Condição de Dirichlet

Seja Ω um domínio e f uma função contínua em $\overline{\Omega}$, as equações de Laplace e Poisson são respectivamente

$$\Delta u = 0 \tag{2.6}$$

$$\Delta u = f \tag{2.7}$$

Dada uma função g contínua em $\partial\Omega$, se Ω é limitado a condição de Dirichlet é

$$u(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega \tag{2.8}$$

Teorema 2.9 *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta u = \Delta v$ em Ω e $u = v$ em $\partial\Omega$. Então $u = v$ em Ω*

Demonstração: Tome $w = u - v$. Então $\Delta w = 0$, $w = 0$ em $\partial\Omega$ e segue do Corolário 2.7. □

Exemplo 2.10 (Potencial de Coulomb) *Vamos determinar as soluções da equação de Laplace em $\mathbb{R}^n \setminus 0$, isso é, as soluções onde $u(x) = u(r)$, para $r = \|x\|^2$*

Para tais funções $D_i u = u'(r)\frac{x_i}{r}$ e portanto $D_{ii} u = u''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + u'(r)\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}$. Assim

$$\Delta u = u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r)$$

Logo, tudo se reduz a resolver a EDO de segunda ordem em r. Se $k, k' \in \mathbb{R}$
Se $n = 1$ a solução é $u(r) = kr + k'$
Se $n = 2$ a solução é $u(r) = kLog(r) + k'$
Se $n > 2$ a solução é -$\frac{k}{(n-2)r^{n-2}} + k'$
Se $u(x) = \|x\|^{2\alpha}$ então $D_{ii} u = 2\alpha\|x\|^{2\alpha-4}[\|x\|^2 - 2x_i^2 + 2\alpha x_i^2]$ e assim

$$\Delta u = 2\alpha\|\|x\|^{2\alpha-2}(n - 2 + 2\alpha)$$

Como $\|x\| > 0$ então o sinal de Δu é o mesmo de $\alpha(n-2+2\alpha)$. Se $\alpha = 0$, u é constante *e logo harmônica. Se* $\alpha = 1 - \frac{n}{2}$*, então u é harmônica. Os casos para u sub-harmônica e super-harmônica seguem dessa análise homologamente.*

2.2 Operadores Elípticos de Segunda Ordem

Dizemos que L é um operador diferencial de segunda ordem se

$$L\colon C^2(\Omega) \to C(\Omega) \tag{2.9}$$

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} D_{ij} + \beta_i D_i u + \gamma \tag{2.10}$$

Onde α_{ij} são funções de Ω a $\mathbb{R}$.
Por exemplo, se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$L \equiv \alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_{21}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_1\frac{\partial}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial}{\partial y} + \gamma$$

Como porém o $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ (pois o domínio são as funções $C^2(\Omega)$ então

$$L \equiv \alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_1\frac{\partial}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial}{\partial y} + \gamma$$

Dessa forma, se definirmos $a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$ podemos reescrever a definição de operador diferencial de segunda ordem por

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} + \beta_i D_i u + \gamma,\ a_{ij} = a_{ji},\ i,j = 1,2,\ldots,n \tag{2.11}$$

Dado o operador diferencial de segunda ordem L, chamaremos de parte principal de L o operador

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}\ a_{ij} = a_{ji},\ i,j = 1,2,\ldots,n \tag{2.12}$$

$A_L = [a_{ij}]$ a matriz (simétrica) associada a L. Dizemos que L é elíptico em $x \in \Omega$ se a matriz $A_L(x)$ é definida positiva. Isso equivale a dizer

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) A_L(x) (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^T > 0$$

ou ainda, existe uma função μ de Ω tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \geq \mu(x)\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 \tag{2.13}$$

Para todas as n-plas de números reais $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$. Dizemos que L é elíptico em Ω se L for eliptico para todo $x \in \Omega$ e diremos que L é uniformemente elíptica em Ω se L for eliptico em Ω e se existir $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(x) \geq \mu_0$ para todo $x \in \Omega$.

Vamos mostrar agora que a Elipticidade de um operador não é afetada por operadores ortogonais

Teorema 2.11 *Se L é um operador elíptico em relação a base canônica do* $\mathbb{R}^n$*, efetuando uma mudança de coordenadas ortogonal C, L continuará elíptico e ainda nessa nova base*

$$\mathcal{L}_C \equiv \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} \tag{2.14}$$

$$Com\ b_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ki}c_{lj} \tag{2.15}$$

Demonstração: Uma vez que $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = c_{ij}$, aplicando a regra da cadeia para D_{ij} obtemos

$$D_i j = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki}c_{lj}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_C &\equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k,l=1}^{n} c_{ki}c_{lj}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}\\ &= \sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ki}c_{lj}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}\end{aligned}$$

Assim, se $b_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ki}c_{lj}$

$$\mathcal{L}_C \equiv \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}$$

A elipticidade segue prontamente da definição. Ainda, a quantidade $\mu(x)$ é preservada e, caso o operador seja uniformemente eliptico, depois da transformação permanecerá uniformemente elíptico. $\square$

Notamos que, se um operador de coeficiente constantes é eliptico no ponto x_0, transladando x_0 a y_0 por uma transformação ortogonal, vemos que L é eliptico também em y_0 e portanto em todo $\mathbb{R}^n$.

Se $\mathcal{L}$ for um operador eliptico de segunda ordem a coeficientes constantes (a_{ij} são funções constantes), então, é um fato conhecido da álgebra linear que a matriz $A_{\mathcal{L}}$ pode ser diagonalizada. Como $A_{\mathcal{L}}$ é positiva definida, podemos garantir ainda que todos os elementos da diagonal são positivos. Escalonando as novas coordenadas por um fator apropriado, podemos transformar $\mathcal{L}$ de forma que que

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$$

Ou seja, podemos transformar $\mathcal{L}$ em um Operador de Laplace.

Por exemplo, se $\mathcal{L}$ for o operador

$$\mathcal{L} \equiv 5D_{11} + 4D_{22} + 3D_{33} + 4D_{12} + 4D_{23}$$

A matriz associada a $\mathcal{L}$ é $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Para diagonalizá-la, vemos que os auto-vetores da matriz são $(2,2,1)$, $(-2,1,2)$ e $(1,-2,2)$ e os auto-valores associados são $7, 4$ e 1. Normalizando os autovetores e escrevendo a matriz de mudança de base C dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Temos

$$\mathcal{L}_C \equiv 7\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + 4\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$$

Se tivessemos utilizado o operador:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\sqrt{7}} & \frac{2}{3\sqrt{7}} & \frac{1}{3\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Teríamos

$$\mathcal{L}_D \equiv \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}$$

Inspirado nesse exemplo, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.12 *Um operador diferencial de segunda ordem L é elíptico no ponto x_0 se, e somente se, existe uma transformação linear*

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_j, \ k = 1, 2, \ldots, n$$

tal que no ponto x_0, $\mathcal{L}$ se transforma no operador de Laplace nas coordenadas $\{z_k\}$

Demonstração: Seja $A(x_0)$ a matriz associada a $\mathcal{L}$ no ponto x_0. Como $A(x_0)$ é simétrica, existe uma matriz $C = (c_{ij})$ (cujas linhas são os auto-vetores da matriz $A(x_0)$) tal que a matriz $B = (b_{ij})$ da equação 2.15 é uma matriz diagonal nas coordenadas $\{y_1, \ldots, y_n\}$.

Ainda $B = (b_{kk})$ onde b_{kk} são os autovalores de $A(x_0)$. Então para qualquer n-pla $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$

$$\sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} \eta_k \eta_l = \sum_{k=1}^{n} b_{kk} \eta_k^2 \geq \mu(x_0) \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2$$

Ou seja, todos os auto-valores de $A(x_0)$ são reais e positivos. Além do mais, se L não fosse eliptica em x_0, tal desigualdade não seria válida para nenhum número positivo $\mu(x_0)$, pois caso contrário C^{-1} levaria a uma desigualdade com o operador L original. Assim, se L não for eliptico, pelo menos um de seus autovalores é não-positivo.

Supondo que $\mathcal{L}$ tenha sido diagonalizado em x_0, introduzindo uma mudança de coordenadas $z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}}} y_k$ e em x_0

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$$

□

2.3 Princípio do Máximo Fraco

Teorema 2.13 (Princípio do Máximo Fraco) *Seja L um operador elíptico em um domínio limitado Ω que satisfaz:*

$$Lu \geq 0, \ h \equiv 0 \ em \ \Omega \tag{2.16}$$

$$\frac{|\beta_i|}{\mu(x)} \leq b_0 \ Para \ algum \ b_0 \in \mathbb{R} \tag{2.17}$$

com $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então o máximo de u em $\overline{\Omega}$ é atingido em $\partial\Omega$

Demonstração: Nossa condição para elipticidade de L (Equação 2.13) nos diz que $a_{11} \geq \mu(x)$. Então, se γ for uma constante suficientemente grande:

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1)e^{\gamma x_1} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0)e^{\gamma x_1} > 0$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, $L(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) > 0$ e assim

$$\sup_{\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1})$$

E assim, tomando o limite quando $\epsilon \to 0$ temos

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

□

Note que trocando u por $-u$ obtemos um princípio do mínimo fraco. Seja $u^+ = \max u, 0$. Considere $\Omega^+ \subset \Omega$ onde $u > 0$. Então, se $Lu \geq 0$, $\sum a_{ij} D_{ij} u + \sum \beta_i D_i u \geq -hu > 0$ em Ω^+ e portanto o máximo de u on Ω^+ deve ser atingido em $\partial\Omega^+ \subset \partial\Omega$, assim temos:

Corolário 2.14 *Seja L um operador elíptico em um domínio limitado Ω que satisfaz:*

$$Lu \geq 0, \ h \leq 0 \ em \ \Omega \tag{2.18}$$

$$\frac{|\beta_i|}{\mu(x)} \leq b_0 \ Para \ algum \ b_0 \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

$$\tag{2.20}$$

Então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$$

Se $Lu = 0$ *então*

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u| \tag{2.21}$$

Com isso obtemos prontamente unicidade para $Lu \equiv 0$ com as condições de Dirichlet:

Teorema 2.15 *Seja L um operador eliptico em um domínio Ω com $h \leq 0$. Suponha que u e v são funções em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ então, se $Lu \geq Lv$ e $u \leq v$ em $\partial\omega$ então $u \leq v$ em Ω. Em particular, se $Lu = Lv$ e $u = v$ em $\partial\Omega$ então $u = v$ em Ω*

Demonstração: Tome $w = u - v$, então, pelo corolário 2.14, como $Lw \geq 0$ e $w \leq 0$ em $\partial\Omega$, temos que $\sup_{\partial\Omega} w^+ = 0$ e portanto $\sup_{\Omega} w \leq 0$, e assim para todo x em Ω $w(x) \leq 0$, de onde temos que $u \leq v$ em Ω. □

2.4 Princípio do Máximo Forte

Proposição 2.16 *Suponha que L seja uniformemente eliptico, $h \equiv 0$ e $Lu \geq 0$ em Ω. Se x_0ß$\partial\Omega$ é tal que*

$$u \text{ é contínua em} x_0$$
$$u(x_0) > u(x) \forall x \in \omega$$
$$x_0 \in \partial B, B \subset \Omega$$

Então, se n for o vetor unitário que aponta pra fora de $\partial\Omega$ em x_0

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0 \tag{2.22}$$

Se $h \leq 0$ e h/μ é limitado, a mesma conclusão segue desde que $u(x_0) \geq 0$. Se $u(x_0) = 0$ a conclusão segue independente do sinal de h.

Demonstração: . Seja $B = B_R(y) \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$ Para $0 < \rho < R$ seja a função

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$$

E $r = |x - y| > \rho$ e α uma constante que será determinada.

Note que

$$Lv = e^{-\alpha r^2}[4\alpha^2 a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha(a_{ii} + \beta_i(x_i - y_i))] + hv$$

$$\geq e^{-\alpha r^2}[4\alpha^2 \mu(x) r^2 - 2\alpha(a_{ii} + |b|r) + h], b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

Como a_{ii}/μ e $|b|/\mu$ e c/μ são limitadas, podemos escolher α grande o suficiente tal que $Lv \geq 0$ em toda a região anelar $A = B_R(y) - B_\rho(y)$. Uma vez que $u - u(x_0) < 0$ em $\partial B_\rho(y)$ existe uma constante $\epsilon > 0$ para a qual $u - u(x_0) + \epsilon v \leq 0$ em $\partial B_\rho(y)$. Essa desigualdade também é satisfeita em $\partial_R(y)$ quando $v = 0$. Logo temos $L(u - u(x_0) + \epsilon v) \geq -hu(x_0) \geq 0$ em A e $u - u(x_0)\epsilon v \leq 0$ em ∂A. Pelo corolário 2.14 temos $u - u(x_0) + \epsilon v \leq 0$ em A. Tomando a derivada normal exterior em x_0 obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial n}(x_0) = -\epsilon v'(R) > 0$$

Se c tem sinal qualquer e $u(x_0) = 0$ o mesmo argumento continua válido se L é trocado por $L - c^+$ □

Teorema 2.17 (Princípio do Máximo Forte de E.Hopf) *Suponha que L seja uniformemente eliptico, $h \equiv 0$ e $Lu \geq 0$ em um domínio Ω. Então, se u atinge um máximo no interior de Ω, u é constante. Se $h \leq 0$ e c/μ é limitado, então u não pode atingir um máximo não-negativo no interior de Ω a não ser que seja constante.*

Demonstração: Assuma que u é não-constante e atinge um máximo $M \geq 0$ no interior de Ω, então o conjunto Ω^- no qual $u < M$ satisfaz $\Omega^- \subset \Omega$ e $\partial\Omega^- \cap \Omega \neq \emptyset$. Seja x_0 um ponto em Ω^- tal que $d(x_0, \partial\Omega^-) < d(x_0, \partial\Omega)$ e considere B a maior bola possível tal que $B \subset \Omega^-$ tendo x_0 como centro. Então $u(y) = M$ para algum ponto $y \in \partial B$ enquanto $u < M$ em B. Pela proposição 2.16 $Du(y) \neq 0$, o que é impossível para um máximo interior como y. □

Referências Bibliográficas

[Gilbarg and Trudinger(2001)] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. springer, 2001.

[Protter and Weinberger(1984)] Murray H Protter and Hans F Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Springer, 1984.

[Renardy and Rogers(2004)] Michael Renardy and Robert C Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 4. Springer, 2004.