

Cardinais Mensuráveis e o Axioma da Construtibilidade

Jonas Gomes

22 de novembro de 2014

Resumo

Usando o teorema de Loś, examinamos a demonstração de Scott da incompatibilidade do Axioma da Construtibilidade e da existência de Cardinais Mensuráveis

1 Ultrafiltros

Dado um conjunto I , dizemos que $U \subset \mathcal{P}(I)$ é um ultrafiltro principal de I se, para todos $A, B \subset I$ temos

1. Se $A \in U$ e $A \subset B$ então $B \in U$
2. Se $A \in U$ e $B \in U$ então $A \cap B \in U$
3. $\emptyset \notin U$
4. Se $A \notin U$ então $I \setminus A \in U$
5. $U = \{X \subset I \mid y \in X\}$ para algum $y \in I$.

Um subconjunto satisfazendo as propriedades 1 a 3 é chamado de filtro, se satisfizer também a propriedade 4, de ultrafiltro. Um ultrafiltro não-principal é um ultrafiltro que não é principal.

Dizemos que um conjunto X tem a propriedade da intersecção finita se para todo $H \subset X$ finito temos $\bigcap H \neq \emptyset$. É imediato verificar que todo filtro tem a propriedade da intersecção finita.

Proposição 1. *Se $\mathcal{A}$ é uma família de subconjuntos de I com a propriedade de intersecção finita, então existe um filtro F que contém $\mathcal{A}$*

Demonstração. Seja $F = \{X \subset I \mid \text{existe } H \text{ finito não vazio, } H \subset \mathcal{A} \text{ e } \bigcap H \subset X\}$. Na definição de filtro (1) é imediato, (2) segue da propriedade da intersecção finita e (3) da exigência que H seja não vazio. Se $X \in \mathcal{A}$ então $H = \{X\}$ é finito e portanto $X \in F$, o que mostra que $\mathcal{A} \subset F$. $\square$

Proposição 2. *F é um ultrafiltro não principal sobre I se e somente se $\bigcap F = \emptyset$*

Demonstração. Se $\bigcap F = \emptyset$ então F não pode ser um ultrafiltro principal. Por outro lado, se F é um ultrafiltro não principal, suponha que $\bigcap F = Y \subset I$. Se $x \in Y$ então ou $\{x\} \in F$ de forma que $Y = \{x\}$ e F é principal ou $I \setminus \{x\} \in F$ de forma que $x \notin Y$. De todas as formas chegamos a uma contradição. $\square$

Corolário 1. Se I é finito, todos os ultrafiltros sobre I são principais

Demonstração. Basta notar que $\bigcap F \in F$ e usar a proposição anterior. $\square$

Corolário 2. Se F é um ultrafiltro principal então $\bigcap F = \{a\}$

Demonstração. Se F é um ultrafiltro principal sabemos pela proposição 2 que $\bigcap F \neq \emptyset$. Suponha que $\{x, y\} \subset \bigcap F$ e $x \neq y$. Como F é ultrafiltro, ou $\{x\} \in F$ e daí $\bigcap F = \{x\}$ ou $I \setminus \{x\} \in F$ de forma que $x \notin \bigcap F$, absurdo. Assim $\bigcap F$ é unitário. $\square$

Proposição 3. Se F for um filtro em I então $X \cap Y \in F$ se, e somente se $X \in F$ e $Y \in F$

Demonstração. Para a ida basta notar que $X \supset X \cap Y$ e $Y \supset X \cap Y$. A volta é imediata. $\square$

Diremos que um Ultrafiltro U sobre I é uniforme se todo $A \in U$ tem a mesma cardinalidade de I . Ainda, diremos que U é α -completo se toda família $\mathcal{F} = \{X_\epsilon : \epsilon < \beta\}$ com $\beta < \alpha$ de elementos de U é tal que $\bigcap \mathcal{F} \in U$. Se U não for α -completo será α -incompleto. Um ultrafiltro $\aleph_1$ -completo será chamado de σ -completo.

2 Ultraprodutos

Se $\mathcal{L}$ for uma linguagem de primeira ordem com apenas um símbolo de predicado binário e $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ for uma família não vazia de estruturas nessa linguagem com domínios M_i , se F for um filtro em I podemos considerar o conjunto $\prod_{i \in I} M_i$ quocientado pela seguinte relação de equivalência:

$$(x_i)_{i \in I} \equiv (y_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \{i \in I : x_i = y_i\} \in F$$

E consideramos a relação $\in^M$ em $M = \prod M_i / \equiv$ definida por

$$[(x_i)_{i \in I}] \in^M [(y_i)_{i \in I}] \Leftrightarrow \{i \in I : x_i \in^{M_i} y_i\} \in F$$

Onde $[(x_i)_{i \in I}]$ representa a classe do elemento $(x_i)_{i \in I}$.

Proposição 4. A relação $\in^M$ está bem definida

Demonstração. Sejam $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}$ e $(z_i)_{i \in I}$ elementos de $\prod_{i \in I} M_i$ tais que $[(x_i)_{i \in I}] = [(z_i)_{i \in I}]$ e $[(y_i)_{i \in I}] = [(w_i)_{i \in I}]$, então, se $J = \{i \in I : x_i \in^{M_i} y_i\} \in F$, seja $G = \{i \in I : x_i = z_i\}$ e $H = \{i \in I : y_i = w_i\}$. Em vista das igualdades acima $G \in F$ e $H \in F$, de forma que $J \cap G \cap H \in F$. Porém, $K = \{i \in I : z_i \in^{M_i} w_i\} \supset J \cap G \cap H$ e portanto como F é filtro, $K \in F$. $\square$

Com a relação ϵ^M em mãos, definimos a estrutura $\mathcal{M}$ com domínio M , o chamado produto reduzido da família $(M_i)_{i \in I}$ com relação ao filtro F . Se F for um ultrafiltro, chamamos $\mathcal{M}$ de ultraproduto. A propriedade mais importante dos ultraproductos vem do seguinte teorema:

Teorema 1 (Teorema de Łoś). *Se $\mathcal{M}$ for o ultraproduto da família $(M_i)_{i \in I}$ em relação a um ultrafiltro U e se ϕ for uma fórmula de $\mathcal{L}$ então*

$$\mathcal{M} \models \phi([(x_i)_{i \in I}], \dots, [(z_i)_{i \in I}]) \Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(x_i, \dots, z_i)\} \in U$$

Demonstração. A indução segue na complexidade de ϕ . Se ϕ for $v_m = v_n$ então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models [(x_i)_{i \in I}] = [(y_i)_{i \in I}] &\Leftrightarrow \{i \in I : x_i = y_i\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models x_i = y_i\} \in U \end{aligned}$$

Se ϕ for $v_m \in v_n$ então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models [(x_i)_{i \in I}] \in [(y_i)_{i \in I}] &\Leftrightarrow [(x_i)_{i \in I}] \in^M [(y_i)_{i \in I}] \Leftrightarrow \\ \{i \in I : x_i \in^{M_i} y_i\} \in U &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models x_i \in y_i\} \in U \end{aligned}$$

Isso cobre o caso das fórmulas atômicas (note que todos nossos termos são variáveis). Se ϕ é $\psi \wedge \xi$ então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \phi &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi \wedge \mathcal{M} \models \xi \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi\} \in U \wedge \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \xi\} \in U \end{aligned}$$

Pela proposição 3

$$\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi\} \cap \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \xi\} \in U \Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi \wedge \xi\} \in U$$

Caso ϕ seja $\neg\psi$ então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \phi &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi\} \notin U \end{aligned}$$

Mas como U é ultrafiltro

$$\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \neg\psi\} \in U$$

Por último, se ϕ for $\exists x\psi$ então, se $\mathcal{M} \models \phi$, existe $\mathbf{x} = [(x_i)_{i \in I}]$ tal que $\mathcal{M} \models \psi(\mathbf{x})$, isso é, $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(x_i)\} \in U$ e portanto como $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(x_i)\} \subset \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \exists x\psi\}$, temos que o último conjunto está em U .

Se $E = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \exists x\psi\} \in U$, usando o axioma da escolha podemos tomar $\mathbf{x} \in \prod M_i$ tal que $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I}$ e para cada $i \in E$ temos $\mathcal{M}_i \models \psi(x_i)$. Portanto, $\mathcal{M} \models \psi(\mathbf{x})$ e assim $\mathcal{M} \models \exists x\psi$. $\square$

Corolário 3. *Se $\mathcal{M} = (M, \epsilon)$ for uma estrutura e Ult for o ultraproduto da família $(M)_{i \in I}$ em relação a um ultrafiltro U , então $Ult \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi$ para toda sentença ϕ .*

Demonstração. Esse é o caso especial do teorema anterior quando todas as estruturas são iguais e a fórmula ϕ é apenas uma sentença. Nesse caso, o conjunto $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi\}$ é I ou $\emptyset$ e dessa forma o resultado segue. $\square$

3 Axioma da Regularidade e Rank

Estaremos interessados em tomar o ultraproduto de todo o universo conjuntista (V) e para isso precisaremos definir uma relação de equivalência em uma classe própria, a construção que usaremos usa o axioma da regularidade e a função rank.

Definimos a hierarquia cumulativa dos conjuntos por indução transfinita: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ e $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ se α for um ordinal limite.

Proposição 5. *Para todo x existe α ordinal tal que $x \in V_\alpha$*

$$\bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha = V$$

Demonstração. Suponha por absurdo que a proposição não seja válida e considere x o elemento ϵ -minimal (aqui o axioma da regularidade se faz essencial) tal que $x \notin V_\alpha$ para todo α . Isso é, para todo $z \in x$, $z \in \bigcup_\alpha V_\alpha$ mas $x \notin \bigcup_\alpha V_\alpha$. Assim, $x \subset \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$. Pelo axioma da substituição, existe γ tal que $x \subset \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha$, logo $x \in V_{\gamma+1}$. Absurdo. $\square$

Tendo em vista a proposição acima, a cada x podemos associar $rank(x)$, o menor ordinal α tal que $x \in V_{\alpha+1}$. Dada uma classe C , podemos considerar

$$C' = \{x \in C : \forall z \in C (rank\ x \leq rank\ z)\}$$

Como cada V_α é um conjunto e $C' \subset V_\alpha$ para o menor α da forma $rank(x)$ para $x \in C$, então C' é um conjunto (e ainda, se C é não vazio, C' é não vazio).

Dada uma relação de equivalência $\equiv$ em uma classe C , podemos da mesma forma denotar a classe de equivalência de um elemento $x \in C$ por

$$[x] = \{y \in C : y \equiv x \wedge \forall z (z \equiv x \rightarrow rank\ y < rank\ z)\}$$

4 Cardinais Mensuráveis

Um número cardinal κ é dito mensurável se existe uma função (medida) $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \rightarrow \{0, 1\}$ que satisfaz:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$ $\mu(\kappa) = 1$
- ii) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$
- iii) $\mu(\{a\}) = 0$
- iv) Se X_α são dois a dois disjuntos e $|X_\alpha| < \kappa$ então

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha\right) = \sum_{\alpha < \lambda} \mu(X_\alpha)$$

Vamos apresentar outra caracterização dos cardinais mensuráveis:

Proposição 6. *Se κ é um cardinal mensurável então existe um ultrafiltro não-principal κ -completo sobre κ*

Demonstração. Basta tomar $U = \mu^{-1}(1)$. A propriedade 1 da definição de ultrafiltro é trivial, devido a propriedade ii de cardinais mensuráveis. Ainda, se $A, B \in U$ então $\mu(A) = \mu(B) = 1$ e $1 = \mu(\kappa \setminus A \cup A) = \mu(\kappa \setminus A) + \mu(A)$ e portanto $\mu(\kappa \setminus A) = 0$ e também $\mu(\kappa \setminus B) = 0$. Pela propriedade iv, $\mu(\kappa \setminus (A \cap B)) = 0$ e portanto $\mu(A \cap B) = 1$ o que prova que $A \cap B \in U$, e a propriedade 2 de ultrafiltros está satisfeita. A propriedade 3 é trivial. Para a propriedade 4, se $A \notin U$ então $\mu(A) = 0$ e então $1 = \mu(\kappa \setminus A \cup A) = \mu(\kappa \setminus A) + \mu(A)$ e portanto $\kappa \setminus A \in U$. Se U for ultrafiltro principal, pelo corolário 2 $\bigcap U = \{a\}$ e logo $\{a\} \in U$, absurdo. Assim U é não principal.

Seja agora $\mathcal{F}$ uma família de elementos de U de cardinalidade $\beta < \kappa$. Pela propriedade iv, $\mu(\bigcup_{\alpha < \beta} \kappa \setminus X_\alpha) = \sum_{\alpha < \beta} \mu(\kappa \setminus X_\alpha) = 0$ e portanto $\mu(\kappa \setminus \bigcap_{\alpha < \beta} X_\alpha) = 0$ e portanto $\bigcap_{\alpha < \beta} X_\alpha \in U$. $\square$

5 Ultraprodutos no Universo

Seja S um conjunto e U um ultrafiltro em U . Seja F a classe de todas as funções com domínio em S . Na classe F defina a seguinte relação de equivalência:

$$f =^* g \Leftrightarrow \{x \in S : f(x) = g(x)\} \in U$$

$$f \in^* g \Leftrightarrow \{x \in S : f(x) \in g(x)\} \in U$$

Usando a função *rank*, a classe de equivalência de uma função f será escrita como

$$[f] = \{g \in F : g =^* f \wedge \forall h (h =^* f \rightarrow \text{rank } g \leq \text{rank } h)\}$$

Da mesma forma como na Proposição 4, a relação $\in^*$ está bem definida para elementos de $M = F / =^*$. De fato, Ult é o ultraproduto da classe de todos os conjuntos V indexado pela família S sobre o ultrafiltro U . Nesse contexto o teorema de Łoś também se aplica e temos

Corolário 4. *Se $\phi(x_1, \dots, x_n)$ é uma fórmula na linguagem da teoria dos conjuntos então*

$$Ult \models \phi([f_1], \dots, [f_n]) \Leftrightarrow \{x \in S : \phi(f_1(x), \dots, f_n(x))\} \in U$$

Também como corolário do Teorema de Łoś, a função $j : V \rightarrow Ult$ que associa a x a função constante igual a x é uma imersão elementar de V em Ult , isso é

$$V \models \phi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow Ult \models \phi([ja_1], \dots, [ja_n])$$

Lembramos que uma estrutura (cujo domínio pode ser uma classe) para a teoria dos conjuntos (M, ϵ^*) é dita bem fundada se

- Todo conjunto não vazio $x \subset M$ tem um elemento ϵ^* minimal

- Para todo $x \in M$, $\text{ext}(x) = \{z \in M : z \in^* x\}$ é um conjunto.

Lema 1. *Se U é um ultrafiltro σ -completo então (Ult, ϵ^*) é bem fundado*

Demonstração. A segunda condição para boa fundação é satisfeita pois U é um ultrafiltro:

$$[f] \in Ult \Rightarrow [f] \subset V_{\text{rank} f}$$

E pelo axioma da regularidade, $[f]$ tem um elemento ϵ minimal que será um elemento ϵ^* minimal.

Suponha agora que a primeira condição não seja satisfeita e seja $f_0, \dots, f_n, \dots$ uma sequência em Ult tal que $f_n \in^* f_{n+1}$. Assim, por definição os conjuntos

$$X_n = \{x \in S : f_n(x) \in f_{n+1}(x)\} \in U$$

Como U é σ -completo, $\bigcap X_n \in U$ e portanto se $x \in \bigcap X_n$ temos que $f_n(x) \in f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \omega$ e portanto conseguimos uma sequência sem elemento ϵ minimal, absurdo. $\square$

Pelo Teorema do Colapso de Mostowski, todo modelo bem fundado é isomorfo a um modelo transitivo. Seja (Ult^*, ϵ^*) o único modelo transitivo isomorfo a Ult e considere que a imagem de $[f]$ pelo isomorfismo é f^* . Assim como Ult , existe uma imersão elementar k de V em Ult^* . Como k é elementar, para todo número ordinal α de V , $k(\alpha)$ é um ordinal e ainda se $\alpha < \beta$ então $k(\alpha) < k(\beta)$. Dessa forma $\alpha \leq k(\alpha)$ para todo α .

Suponha agora que exista um cardinal κ mensurável, escolha $S = \kappa$ e pela proposição 6 existe um ultrafiltro U sobre κ que é não principal e κ -completo. Vamos construir Ult e Ult^* com tal ultrafiltro.

Em κ seja d a função diagonal, definida por

$$d(\alpha) = \alpha, \alpha < \kappa$$

Como U é κ -completo, se X é um conjunto limitado de κ então $X \notin U$. Assim para todo $\lambda < \kappa$ e para todo $\alpha \in U$ temos $d(\alpha) > \lambda$. Portanto $[d] > \lambda$ e assim $[d] \geq \kappa$ e portanto $k^* \geq \kappa$. Como $d^* < k(\kappa)$ isso nos dá que $\kappa < k(\kappa)$.

Portanto, assumindo a existência de um cardinal mensurável, existe um modelo transitivo (Ult^*, ϵ^*) e uma imersão elementar não trivial (não constante).

Teorema 2. *Se existe um cardinal mensurável κ então $V \neq L$*

Demonstração. Assuma que $V = L$ e seja κ o menor cardinal mensurável. Como M é transitivo e contém todos os ordinais, segue do axioma da construtibilidade que $M = L$. Seja agora k a imersão elementar não trivial construída anteriormente. Como $L \models \kappa$ é o menor cardinal mensurável, então $M \models k(\kappa)$ é o menor cardinal mensurável. Mas como $M = L$ e $k(\kappa) > \kappa$, chegamos a uma contradição. $\square$